Interrogation n°7 — Corrigé (sujet A)

NOM : .... Prénom : .... Note :

1) Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire. Donner la définition de "f est alternée".

Cf cours.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Donner une formule faisant intervenir A et sa comatrice notée $\mathrm{Com}(A)$. En déduire l'inverse de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ si $ad - bc \neq 0$.

Cf cours.

3) On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et pour tous $a, b, c \in \mathbb{C}$, on considère le système $\begin{cases} x+y+z = a \\ x+jy+j^2z = b \\ x+j^2y+jz = c \end{cases}$. Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ et montrer qu'il est non nul. Appliquer les formules de Cramer pour obtenir x, y et z. *On donnera uniquement l'expression des déterminants des formules de Cramer sans chercher à les calculer.*

$$\begin{aligned}
\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & j-1 & j^2-1 \\ 0 & j^2-1 & j-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} j-1 & j^2-1 \\ j^2-1 & j-1 \end{vmatrix} \\
&= (j-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & j+1 \\ j+1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (j-1)^2(1-(j+1)^2) \\
&= (j-1)^2(-j^2-2j) = -j(j-1)^2(j+2)
\end{aligned}$$

et clairement $j \neq 0$, $j \neq 1$ et $j \neq -2$ car $j \notin \mathbb{R}$. Ainsi, $\det A \neq 0$. On en déduit, par les formules de Cramer :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & j & j^2 \\ c & j^2 & j \end{vmatrix}}{\det A} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & j^2 \\ 1 & c & j \end{vmatrix}}{\det A} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & j & b \\ 1 & j^2 & c \end{vmatrix}}{\det A}$$

Interrogation n°7 — Corrigé (sujet B)

NOM : .... Prénom : .... Note :

1) Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire. Donner la définition de “f est antisymétrique”.

Cf cours.

2) On donne $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$. Écrire le développement de D selon la deuxième colonne, puis en déduire la valeur de D (on ne demande pas de factoriser cette expression).

$$\begin{aligned} D &= -b\begin{vmatrix} c & b \\ b & a \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} a & c \\ b & a \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} a & c \\ c & b \end{vmatrix} \\ &= -b(ac-b^2) + a(a^2-bc) - c(ab-c^2) \\ &= a^3+b^3+c^3-3abc \end{aligned}$$

3) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 6 & -6 & -1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer le mineur de A noté Δ qui est composé des lignes 2 et 4 ainsi que des colonnes 2 et 5. Que peut-on en déduire sur le rang de A ? Même question avec le mineur de A noté Δ' qui est composé des lignes 1, 3 et 4 ainsi que des colonnes 1, 3 et 4.

$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = -6+42 = 36$. Comme $\Delta \neq 0$, on en déduit que $\mathrm{rg} A \geq 2$.

$\Delta' = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 6 & -1 & 9 \end{vmatrix} = (\ldots) = 0$ mais ceci ne fournit aucune information sur le rang de A ! Il faudrait que TOUS les mineurs de taille 3 de A soient nuls pour en déduire que le rang de A est strictement plus petit que 3.